

飞机结冰的不确定性量化研究进展

郝云权^{1,2}, 赵大志¹, 李伟斌², 赵 炜², 陈江涛²

(1. 西南石油大学 理学院, 成都 610500;

2. 中国空气动力研究与发展中心 计算空气动力研究所, 四川 绵阳 621000)

摘 要: 为深入认识影响飞机结冰的不确定性及其研究方法,从自然条件结冰、冰风洞试验、数值模拟等方面,介绍了飞机结冰不确定性来源,以蒙特卡洛法、多项式混沌法和随机配置法为例,系统分析了各种不确定性量化方法在计算能力、求解精度等方面的优劣。考虑飞机结冰不确定性量化处于起步时期,重点综述了数值模拟中结冰条件不确定性对冰形和气动特性的影响。从结合单步法和多步法确定最佳结冰时间步长来提升结冰计算精度和效率、对其他关键部件进行结冰不确定性量化从而为更精细化的防/除冰系统的设计提供支撑,以及通过建立高精度的代理模型来代替原本复杂的数值模拟系统以应对考虑多个不确定性因素共同作用所带来的计算挑战等多个方面,全面展望不确定性量化方法及其在飞机结冰应用中的发展方向。

关 键 词: 飞机结冰; 不确定性量化; 蒙特卡洛法; 多项式混沌法; 随机配置法

中图分类号: V211.71

文献标志码: A

Recent advances in uncertainty quantification research of aircraft icing

HAO Yunquan^{1,2}, ZHAO Dazhi¹, LI Weibin², ZHAO Wei², CHEN Jiangtao²

(1. School of Sciences, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China;

2. Computational Aerodynamics Institute,

China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang Sichuan 621000, China)

Abstract: In order to deeply understand the uncertainty affecting aircraft icing and its research methods, the sources of aircraft icing uncertainty were introduced from the aspects of natural icing, ice wind tunnel test, and numerical simulation. Taking Monte Carlo method, polynomial chaos method and random configuration method as examples, the advantages and disadvantages of various uncertainty quantification methods in calculation ability and solution accuracy were systematically analyzed. Furthermore, considering the quantification of aircraft icing uncertainty at the beginning, focus was put on the influence of icing condition uncertainty on ice shape and aerodynamic characteristics in numerical simulation. Finally, single-step and multi-step methods were combined to determine the best ice time step to improve the accuracy and efficiency of ice calculation, to quantify the ice uncertainty of other key components to provide support for the more refined design of ice prevention/de-icing system, and to build a high-precision proxy model to re-

收稿日期: 2021-10-25

基金项目: 四川省科技计划项目(2021YJ0526); 国家数值风洞工程

作者简介: 郝云权(1996—),男,硕士生,主要从事飞机结冰不确定量化研究。

通信作者: 李伟斌(1985—),男,副研究员,博士,主要从事飞机结冰特性及视觉测量研究。E-mail:liweibin@nudt.edu.cn

引用格式: 郝云权,赵大志,李伟斌,等. 飞机结冰的不确定性量化研究进展[J]. 航空动力学报,2022,37(9):1855-1871. HAO Yunquan, ZHAO Dazhi, LI Weibin, et al. Recent advances in uncertainty quantification research of aircraft icing[J]. Journal of Aerospace Power, 2022, 37(9): 1855-1871.

place the original complex numerical simulation system for meeting the computational challenges caused by the combined action of multiple uncertainties, etc. Overall prospect of uncertainty quantification method and its development direction in aircraft icing application was presented.

Key words: aircraft icing; uncertainty quantification; Monte Carlo method; polynomial chaos method; stochastic collocation method

飞机在穿越云层飞行时,云层中的过冷水滴撞击到飞机的机翼、机身、发动机进气道等表面,会发生冻结形成冰层^[1-2]。飞机结冰直接改变飞机气动外形,进而影响飞机的气动性能,对飞行稳定性产生巨大危害,严重时甚至引起机毁人亡的事故^[3]。统计数据表明,由飞机结冰造成的航空事故比例超过15%^[4],由此可见飞机结冰对飞机飞行的安全性能影响非常大。开展飞机结冰研究可以深入认识其发生的复杂物理过程,有效提升防/除冰手段和效率,并有助于保证飞行安全。

飞机结冰研究的手段主要包括数值模拟和结冰试验(包括冰风洞试验、喷洒塔试验、试飞试验等)^[5-9]。由于飞机结冰的过程涉及较多物理现象,发生机制非常复杂,因此这些研究手段中难免存在各种不确定性,这些不确定性会直接影响结冰的研究与分析。比如,即使是结冰形状的微小不确定性也会引起飞机气动性能的巨大不确定性,因此量化飞机结冰的不确定性是必要的。

开展飞机结冰不确定性量化研究具有重要意义,主要体现在:①飞机结冰受大量不确定性因素的影响,相应地结冰后的气动性能也具有不确定性,通常的确定性估计不具有代表性,必须以统计表征的形式开展飞机结冰的不确定性量化研究,从而得到更加可靠的结论;②开展结冰不确定性量化的研究,得到结冰条件对结冰和气动性能的影响程度,对深入认识结冰发生机理、影响机制有促进作用;③开展结冰不确定性量化的研究,可以对飞机结冰研究中相关试验手段和仿真方法进行量化评价,进而提升结冰试验能力、提高数值模拟精度。

本文针对飞机结冰过程中存在的大量不确定性问题,从飞机结冰的不确定性来源、结冰不确定性量化方法、飞机结冰不确定性量化研究等几方面,开展详细的综述。并基于此,从飞机结冰的研究手段、发生部位、多因素影响、不确定性量化方法等多个方面,对结冰不确定性研究进行了展望,期望对未来结冰不确定性量化的研究工作有一定启发。

1 飞机结冰的不确定性来源

1.1 自然条件下飞机结冰不确定性来源

自然条件下飞机结冰的不确定性来源主要包括飞机几何外形、飞行来流条件、飞行状态等^[10-11]。

①飞机在制造过程中不可避免地会与外形尺寸存在一定的差异,由此产生的翼型表面粗糙度和飞机几何外形不确定性,会影响结冰的冰形和飞机的气动性能;②飞机在自然条件下飞行时,随着大气压力、温度、液态水含量、水滴中值粒径等来流条件变化时,飞机表面的结冰生长过程同样会发生变化,影响飞机的气动性能;③飞机飞行过程中的阵风导致的飞行速度不确定性,以及飞行员应对结冰情况导致的飞行姿态不确定性会对结冰的位置和外形产生影响,甚至会影响飞机的气动性能^[12]。

1.2 冰风洞试验不确定性来源

冰风洞试验是研究飞机结冰问题的直接手段,和自然结冰类似,冰风洞试验条件(温度、水滴中值粒径、风速、液态水含量等)由不同设备协同控制和标定而确定,这些人为参与的误差和设备的运行误差会带来试验条件的不确定性。同时,受试验段尺寸限制,冰风洞试验中多开展的是缩比试验^[13-14],这样基于缩比模型和相似准则^[15]计算的试验条件同样存在不确定性。另外,结冰试验中得到的是三维冰形,由于测量效率和测量技术限制,一般选择几个二维的结冰截面作为试验产物,进而在此基础上开始后续的结冰气动影响计算或者试验。在这一过程中也存在着大量人为操作和测量简化引起的结果不确定性。这些试验中涉及的人工行为、设备装置、试验技术、基础理论等因素导致的不确定性,会对试验结果造成影响^[16-20]。

1.3 结冰数值模拟不确定性来源

结冰数值模拟是飞机结冰研究的另一重要手段,通过对整个过程进行数学建模,进而采用计算机数值求解结冰外形及其结冰的影响。在整个数值仿真的过程中,存在着大量的不确定性因素,包

据计算方法、计算模型、计算参数等^[21-22]。

在计算方法方面,目前流行的方法仍然是将空气场、水滴场、结冰、结冰影响进行解耦计算^[23],与真实物理过程存在很大差异,而且为了计算的可行性,数值模拟都会提出一定的假设,这些都造成了不确定结果。

在计算模型方面,结冰数值模拟涉及到流场、水滴场、冰形生长等相关模型,它们的方程和计算格式存在多种形式,给计算带来了一定的不确定性。结冰是传热、传质、流动等耦合的复杂问题,结冰热力学模型有很多,比如经典的 Messinger^[24]、Myers^[25]等等,选取合理的结冰模型关系到结冰数值模拟结果^[26-27]。同时,水滴收集率的计算方法有 Lagrange 方法^[28-29]和 Euler 方法^[30-33],在求解水滴输运方程时,模型的选择同样会引起不确定性。另外,湍流模型的选取也直接影响物面的流动,不同的计算场景都对应着相对适用的模型。

在计算参数方面,数值模拟过程中存在大量的参数设置,比如格式中的权重因子,湍流模型中的相关参数、物性参数等等,这些参数一般需要根据经验人为设置^[34],它们的不同同样会给计算结果引入不确定性。

2 不确定性量化典型方法

不确定性广泛存在于不同学科领域和工程系统中,如航空航天学、流体力学、大气气象学等。工程概率分析理论根据不确定性的表现形式将不确定性分为随机不确定性和认知不确定性^[35],前者是一类客观存在的随机性,可以用概率学的方法进行表征,后者是由于对问题认识不足而导致的随机性,这一类不确定性通常难以用概率学的方法进行量化分析。目前,多数工程领域的不确定性量化分析工作仅针对不可减小的随机不确定性展开。

17 世纪 Pascal 和 Fermat 对赌博问题的研究导致了概率论的诞生^[36]。到 20 世纪,著名科学家 Wiener 和 van Kampen 又在科学层面上指出大部分系统充满了不确定性^[37-38]。从逻辑学角度来看,对确定性逻辑满足的任意定律的否定都对应着一种不确定性,其中应用最广的是随机性和模糊性^[39]。

在具体研究中,不确定性量化研究误差和不确定性来源,主要考虑系统参数的不确定性、数学模型对实际问题近似的 uncertainty、计算过程中利

用数值方法得到的近似解与精确解引入的误差 uncertainty 等^[40-41]。当前不确定性量化的研究热点主要是参数不确定性,而量化参数不确定性的方法又可以分为统计型和非统计型。其中统计型的方法以蒙特卡洛(Monte Carlo, MC)方法及其改进方法为主,非统计型的方法包括多项式混沌方法、随机配置法等^[42],这一节将对这些方法在结冰中的应用做简要的叙述。

2.1 MC 方法

MC 方法及其改进方法^[43]是一种可以考虑高维随机变量,简单易用的基于样本的方法。它根据系统参数 x 的概率分布随机地产生一组样本作为系统输入参数 $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$,对于每一个输入的随机样本 x_i ,通过利用已有的程序对原系统进行重复性的数值模拟,得到确定性问题 $F(x, y) = 0$ 的解 y_i ,从而获得解的一些统计信息,例如均值

$$\mu = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y_i \quad (1)$$

其中 M 表示抽样的样本数量。

解的方差 δ^2 可以表示为

$$\delta^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (y_i - \mu)^2 \quad (2)$$

将 MC 方法应用于量化飞机飞行时来流条件参数(如:温度、液态水含量、水滴中值粒径等)不确定性对结冰的影响中,具体流程如图 1 所示。在图 1 中,首先在给定的来流条件参数分布的情况下,生成大规模参数样本,然后通过随机抽样获取 M 个样本用于结冰数值模拟中,计算结冰的冰形,最后,统计处理 M 次结冰冰形结果,输出结冰的可能范围。

使用 MC 方法量化来流条件参数不确定性,

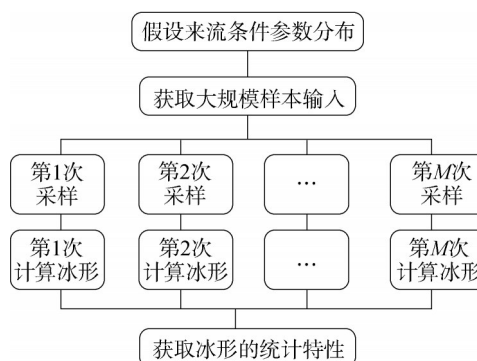


图1 来流条件不确定性量化流程图

Fig.1 Flow chart of uncertainty quantification of inflow conditions

虽然实施起来相对简单,但 MC 方法收敛速度慢,均值收敛率仅为 $1/\sqrt{M}^{[44]}$ 。因此,在为了得到较精确的数值结果而使用大量的样本数据时,会极大地增加计算成本。针对这一不足,许多改进的 MC 方法被相继提出,如提升收敛速度的准 MC 采样^[45-46]和 Latin 超立方采样^[47-48]等,但这些新的改进方法给求解带来了额外的限制条件,导致它们的应用受到一定的限制。

2.2 多项式混沌方法

多项式混沌方法是近年来被广泛使用,并且能有效量化系统不确定性的计算方法,其基本思想就是将精确解在随机参数空间进行多项式展开。这种做法最开始由 Wiener^[36]在 1938 年使用 Hermite 多项式对高斯过程进行分解时提出。后来, Ghanem 和 Spanos 通过以 Hermite 多项式作为正交基^[49],将多项式混沌方法和空间上的有限元方法相结合,用于解决许多实际工程问题中存在的非线性不确定性^[50-52]。由于在处理实际问题时,遇到的概率分布不一定是高斯分布,因此 Xiu 和 Karniadakis^[53]基于 Askey 系统将多项式混沌方法广义化,提出了一种包含连续型正交多项式和离散型正交多项式的广义多项式混沌方法,用于处理更一般的随机参数输入问题。

Wan 等^[54-55]以及 Prempraneerach 等^[56]为了保证多项式混沌展开的精度,在处理随机空间的非连续性问题时,提出了多元随机变量广义多项式混沌展开方法,具体方法如下:

若系统状态 Y (如飞机的气动性能) 可由 d 个独立的随机变量 $X_1, \dots, X_d$ (如脊冰的位置、高度等) 表示,令 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$, 则系统 Y 满足

$$Y = y(\mathbf{X}, t) \quad (3)$$

将系统状态 Y 用 P 阶截断的由输入变量 $\mathbf{X}$ 组成的多项式正交基序列进行表示:

$$y(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=0}^{N-1} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{X}) \quad (4)$$

其中 $a_i(t)$ 是待求的多项式混沌展开的系数, $\Phi_i(\mathbf{X})$ 是随机向量 $\mathbf{X}$ 对应分布的正交多项式基,而多项式的项数 N 可以通过式(5)计算:

$$N = \frac{(P+d)!}{P!d!} \quad (5)$$

当随机输入的分布已知时,根据 Xiu 和 Karniadakis 基于 Wiener-Askey 系统推广的多项式逼近来选取合适的正交基^[53],可用于处理参数输入分布已知的问题,表 1 给出了部分常见的概率分

表 1 常见的分布类型及其对应的正交基函数

Table 1 Common distribution types and their corresponding orthogonal basis functions

	分布	定义域	多项式基
连续型	Gaussian	$(-\infty, \infty)$	Hermite
	Uniform	$[b_1, b_2]$	Legendre
	Gamma	$[0, \infty)$	Laguerre
	Beta	$[b_1, b_2]$	Jacobi
离散型	Binomial	$\{0, 1, \dots, N\}$	Krawtchouk
	Poisson	$\{0, 1, 2, \dots\}$	Charlier

布函数及其对应的多项式正交基函数。

注意,正交多项式基满足正交关系式:

$$E[\Phi_i(\mathbf{X})\Phi_j(\mathbf{X})] = \int \Phi_i(\mathbf{X})\Phi_j(\mathbf{X})dF(\mathbf{X}) = \gamma_i\delta_{ij} \quad (6)$$

其中 $\gamma_i = E[\Phi_i^2]$, 这里 $E[\cdot]$ 为数学期望, $F(\mathbf{X})$ 是联合分布函数, δ_{ij} 为 Kronecker 算符:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (7)$$

目标输出函数的统计特征可以通过 $y(\mathbf{X}, t)$ 的展开形式近似得到^[40]

1) 均值

$$\mu \triangleq E[y(\mathbf{X}, t)] \approx E\left[\sum_{i=0}^{N-1} a_i(t)\Phi_i(\mathbf{X})\right] = \int \left[\sum_{i=0}^{N-1} a_i(t)\Phi_i(\mathbf{X})\right]dF(\mathbf{X}) = a_0(t) \quad (8)$$

2) 方差

$$\sigma^2 = E[(y(\mathbf{X}, t) - \mu)^2] \approx \sum_{i=1}^{N-1} a_i^2(t) \quad (9)$$

此外,2010 年 Xiu^[57]又详细介绍了广义多项式混沌展开的统计特征和数值实现。多项式混沌方法更深入的研究及其在工程领域中的应用可以参考学者们在文献[58-62]中所做的工作。

在假定不确定输入参数均服从高斯分布的前提下,使用多项式混沌展开 (polynomial chaos expansion, PCE) 量化结冰形状的不确定性对飞机气动性能的影响,可以通过如图 2 展示的流程实现。首先选取 Hermite 多项式作为多项式逼近的正交基,以高斯节点为配置点,并在配置点处求解确定性 Reynolds average Navier-Stokes (RANS) 控制方程,通过求解未知系数 $a_i(t)$,得到飞机的气动性能 Y 关于不确定性因素结冰形状的 PCE 近似模型,最终获得气动性能 Y 的统计

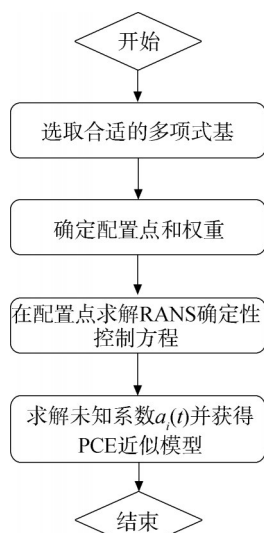


图2 PCE方法量化冰形不确定性对气动性能的影响流程图

Fig.2 Flow chart of PCE method to quantify the effect of ice shape uncertainty on aerodynamic performance

特性。

PCE方法虽然可以有效、准确地量化气动性能的不确定性,但是所研究的冰形并不反映飞机飞行时结冰的真实冰形,因此可以通过数据驱动的方法^[62-66],将整个不确定性量化方法扩展到分析“真实”数据上,这里简单介绍基于矩匹配法的数据驱动法^[62]。

以一维为例,主要介绍利用随机变量 x 统计数据的若干阶矩信息构造多项式基。由前文定义可知,系统状态变量 Y 可用截断的输入变量 x 组成的多项式正交基序列近似表示:

$$Y = y(x, t) \approx \sum_{i=0}^{N-1} [a_i(t) \varphi^{(i)}(x)] \quad (10)$$

假设随机变量 x 的 $2N$ 阶矩存在,通过利用样本的矩信息构造 $\varphi^{(k)}(x)$ 的多项式,从而使其形成任意分布的正交基,此时可以将式(10)进一步地改写为

$$Y = y(x, t) \approx \sum_{i=0}^{N-1} [a_i(t) \varphi^{(i)}(x)] = \sum_{i=0}^{N-1} a_i(t) \left(\sum_{k=0}^i \varphi_i^{(k)} x^k \right) \quad (11)$$

其中 $a_i(t)$ 是待求系数, $\varphi_i^{(k)}$ 是组成多项式基的第 k 个单项式的系数。

使用随机变量的矩信息构建正交多项式基 $\varphi^{(i)}(x)$,首先定义随机变量 x 在概率空间 I 上的第 k 阶统计矩为 μ_k :

$$\mu_k = \int_{x \in I} x^k dF(x) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (12)$$

其中 x_i 表示随机变量 x 的第 i 个采样点。

在随机变量 x 的概率空间 I 上,多项式混沌展开式中任意两个多项式基满足

$$\int_{x \in I} \varphi^{(i)}(x) \varphi^{(j)}(x) dF(x) = \begin{cases} \delta_{ij} > 0, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 0, \dots, N-1 \quad (13)$$

其中 $F(x)$ 为概率分布函数, $\varphi^{(i)}(x)$ 和 $\varphi^{(j)}(x)$ 分别是第 i 阶和第 j 阶多项式基。

通过引入辅助条件,将所有多项式基的首项数归一化为

$$\varphi_k^{(k)} = 1, \forall k \quad (14)$$

由式(13)可知,对于任意低于 k 阶的多项式基一定满足

$$\int_{x \in I} \varphi^{(l)}(x) \varphi^{(k)}(x) dF(x) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, k-1 \quad (15)$$

为了得到 k 阶以及所有低于 k 阶的多项式基,根据式(15),对所有低于 k 阶的多项式基满足的条件扩展为以下方程组形式:

$$\begin{cases} \int_{x \in I} \varphi^{(0)}(x) \varphi^{(k)}(x) dF(x) = 0 \\ \int_{x \in I} \varphi^{(1)}(x) \varphi^{(k)}(x) dF(x) = 0 \\ \vdots \\ \int_{x \in I} \varphi^{(k-1)}(x) \varphi^{(k)}(x) dF(x) = 0 \\ \varphi_k^{(k)} = 1 \end{cases} \quad (16)$$

将式(16)进一步写为多项式基对应的单项式系数形式:

$$\begin{cases} \int_{x \in I} \varphi_0^{(0)}(x) \left[\sum_{i=0}^k \varphi_i^{(k)} x^i \right] dF(x) = 0 \\ \int_{x \in I} \left[\sum_{i=0}^1 \varphi_i^{(1)} x^i \right] \left[\sum_{i=0}^k \varphi_i^{(k)} x^i \right] dF(x) = 0 \\ \vdots \\ \int_{x \in I} \left[\sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i^{(k-1)} x^i \right] \left[\sum_{i=0}^k \varphi_i^{(k)} x^i \right] dF(x) = 0 \\ \varphi_k^{(k)} = 1 \end{cases} \quad (17)$$

式(17)定义了所有多项式基的待求系数 $\varphi_i^{(k)}$,且第 k 阶多项式基的定义使用了所有低于 k 阶的多项式基,因此将式(17)中的第1个方程代入第2个方程、第1个和第2个方程代入第3个方程,依次类推,并结合式(12)将式(17)化简为

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^k \varphi_i^{(k)} \mu_i = 0 \\ \sum_{i=0}^k \varphi_i^{(k)} \mu_{i+1} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^k \varphi_i^{(k)} \mu_{i+k-1} = 0 \\ \varphi_k^{(k)} = 1 \end{array} \right. \quad (18)$$

将式(18)用更简便的矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{k-1} & \mu_k & \cdots & \mu_{2k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0^{(k)} \\ \varphi_1^{(k)} \\ \vdots \\ \varphi_{k-1}^{(k)} \\ \varphi_k^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

通过求解式(19),可以获得多项式基对应的单项式系数,基于此,求出各阶多项式基,本节针对的是一维问题。对于高维的情况(不确定输入随机变量个数高于5个),Ahlfeld等^[67]利用矩信息定义了一种Hankel矩阵的矩阵运算替代方法,通过从Hankel矩阵中找出最优正交多项式的三项递推式,进而构造正交多项式基。观察式(10)~式(19),显然,对于任意输入变量的参数分布,矩信息是唯一必需的信息,意味着如果输入分布的 $2N$ 阶矩存在,便可以通过原始数据集计算出所需的各阶矩,从而构建正交多项式基,并在此基础上执行不确定性量化。

$$\begin{bmatrix} \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \cdots & \Phi_{N-1}(x_1) \\ \Phi_0(x_2) & \Phi_1(x_2) & \cdots & \Phi_{N-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(x_M) & \Phi_1(x_M) & \cdots & \Phi_{N-1}(x_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{N-1}(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} y(x_1, t) \\ y(x_2, t) \\ \vdots \\ y(x_M, t) \end{bmatrix} \quad (22)$$

将式(22)改写为关于未知系数 $a_i(t)$ 方程的矩阵形式:

$$Aa \approx y \quad (23)$$

其中矩阵 A 中的元素满足 $A_{m,n} = \Phi_{n-1}(x_m)$, a 是由系数 $a_i(t)$ 组成的列向量, y 是由 $y(x_m, t)$ 组成的列向量。

以来流风速为例,使用随机配置法量化来流风速的不确定性对结冰外形的影响,具体流程如图3所示。在图3中,首先输入样本参数来流风速 x_m ,通过计算流体力学(computational fluid dynamics, CFD)方法对配置点进行确定性计算,得到结冰外形样本解 $y(x_m, t)$,选取适合的多项式基拟合未知系数 $a_i(t)$,最后通过 $a_i(t)$ 获得样本解结冰外形的统计信息。

2.3 随机配置法

随机配置法是目前使用最广的不确定性量化方法之一,它结合了MC方法和Galerkin投影方法^[68-69]的优点,只需要求解一定数量与原随机问题同等规模的确定性问题,并通过计算一些特殊的样本信息,就能得到系统的随机响应量。随机配置法的具体实现方法如下:

首先,令 $\{x_m\}_{m=1}^M$ 是在随机参数空间选取的 M 个样本,此时,对于每一个样本 x_m ,令 $x = x_m$,式(10)求解未知系数的问题就成了确定性问题。于是,可以利用随机有限元或谱方法等确定性算法来获得 $y(x_m, t)$ 。对于所有样本 $\{x_m\}_{m=1}^M$,此时可以获得对应的样本解 $\{y(x_m, t)\}_{m=1}^M$,进一步地利用样本信息寻求如式(4)的多项式逼近,如下:

$$\sum_{i=0}^{N-1} [\Phi_i(x_m) a_i(t) \approx y(x_m, t)], \quad m = 1, \dots, M \quad (20)$$

通常情况下,在一个自由度为 K 的离散物理空间中,所得到样本解信息 $y(x_m, t)$ 是一个一个 K 维向量,对应的样本解为

$$y(x_m, t) = [y(x_m, t_1), \dots, y(x_m, t_K)] \quad (21)$$

但是为了便于理解,需要忽略物理空间的离散,此时对于每一个物理网格点,可以将式(20)改写成如下矩阵形式:

当不确定性变量 x_m 服从高斯分布时,通过查询表1可知,对应的正交多项式为Hermite多项式,此时选取的配置点即为高斯点,其在结冰不确定性量化中的具体应用可以参见董世充所做的工作^[70]。虽然随机配置法已被成功应用于飞机结冰的不确定性量化中,但是在量化结冰参数的不确定性时,伴随着不确定参数维数的增加,所需的总节点数会呈现出指数型增长,并且每一个节点都要求对相应的确定性系统进行全局模拟,这会导致严重的维数灾难问题并提高计算成本。在应对高维度挑战的相关研究中,Smolyak^[71]在高维求积中引入原始的稀疏节点,来缓解维数灾难问题,并被董世充^[70]成功应用于模拟4阶精度顶盖驱动流在多个不确定因素下的流动,验证了在高维情况

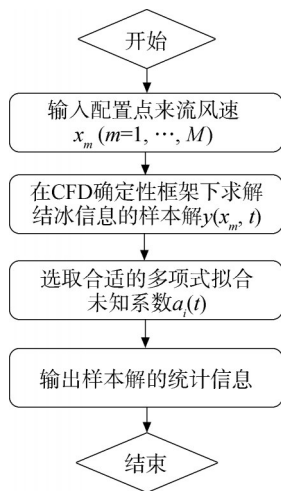


图3 来流风速不确定性量化流程图

Fig.3 Flow chart of uncertainty quantification of incoming wind speed

下,引入稀疏节点能提高计算效率。稀疏节点自提出后,便得到了快速的发展^[72-74]。比如通过在插值方法中采用稀疏节点来降低随机空间中的节点数量^[75],也可以通过计算节点的自适应性和自适应性稀疏节点搭配法来缓解计算成本^[76]。然而,随着实际工程问题对不确定性量化的需求不断加深,上述传统的张量型插值方法已经无法满足某些工程问题的需要,这使得随机配置法得到了进一步的发展。当下不确定性量化计算中应用最为高效的方法有离散最小二乘法^[77-80]和压缩感知方法^[81-83],这里不再进行详细叙述。

3 飞机结冰不确定性量化研究

由于不确定性量化在飞机结冰中的研究处于起步阶段,目前仅有飞机结冰数值模拟中的相关不确定性研究,本节就结冰条件对冰形和气动特性的影响展开叙述。

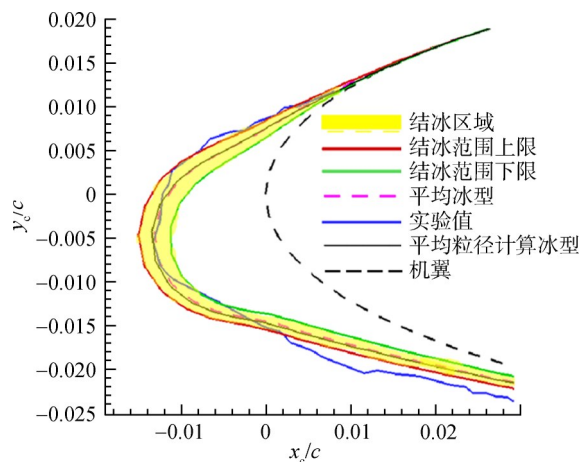
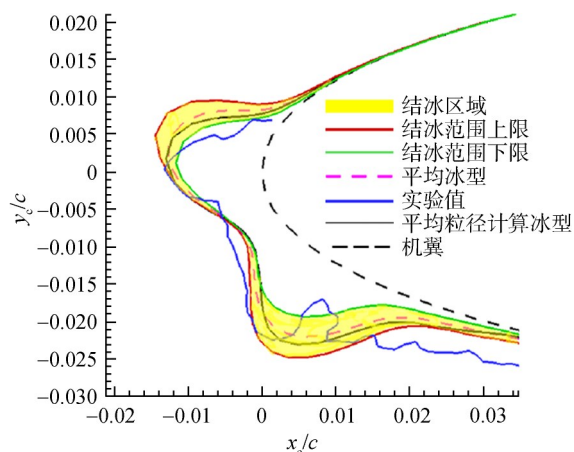
3.1 结冰条件不确定性对冰形的影响

在过去的结冰条件对冰形影响的研究中,学者们在确定性框架下开展了较为深入的研究工作^[84-88],但是关于结冰条件不确定性对冰形的影响相关研究较少。现有的结冰条件不确定性量化研究中,2019年Feng等^[89]通过积冰试验验证了基于输入参数混合不确定性、区间参数不确定性和本体模糊性的飞机结冰严重程度预测模型的可行性和合理性。李佩哲^[90]首先基于Messinger模型思想,通过建立结冰模拟中确定性问题的求解框架来计算结冰冰形,并将数值模拟结果得到的冰形与试验冰形相比较,验证了在确定性问题的求解

框架下,液态水含量是限制霜冰结冰量的主要因素,换热量影响混合冰增长,而明冰的生长则受水膜流动和传热的影响。随后,他又以水滴中值粒径为例,基于MC方法构建了分析飞机结冰条件不确定性对冰形影响的分析框架,并给出了不确定性分析的数值模拟结果如下。

从图4(图中横、纵坐标 x_c 、 y_c 分别表示弦向方向和与弦向垂直的方向, c 表示翼型弦长)霜冰算例的不确定性量化分析结果中可以看出,在霜冰的头部,不确定性模拟结果与试验冰形吻合程度高,说明水滴中值粒径不确定性导致霜冰的不确定性主要集中在霜冰的头部。

在图5混合冰算例不确定性量化分析结果中,可以明显地看出混合冰冰形的不确定性模拟结果和试验冰形在两个角冰之间有较大差异,表

图4 霜冰算例不确定性量化分析结果^[90]Fig.4 Uncertainty quantification analysis results of frosted ice case^[90]图5 混合冰算例不确定性分析结果^[90]Fig.5 Uncertainty quantification analysis results of a mixed ice case^[90]

明水滴中值粒径不确定性对混合冰冰形的影响主要体现在上下角冰上。

在图 6 中,明冰算例不确定性量化分析结果表明明冰冰形不确定性模拟的结果与试验冰形在角冰位置上存在一定的差异,认为水滴中值粒径不确定性对明角冰位置有较大的影响。

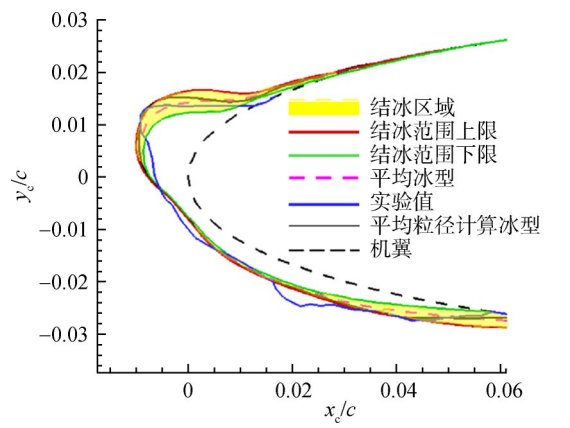


图 6 明冰算例不确定性量化分析结果^[90]
Fig.6 Uncertainty quantification analysis results of a clear ice case^[90]

过去的研究表明,机翼的初始表面粗糙度不确定性会通过作用于表面的对流热传递影响结冰过程,引起不确定的结冰特性^[91-93]。为了量化由工艺制造误差引起的翼型表面粗糙度的不确定性对结冰特性的影响,2021 年 Kevin 等^[94]选取粗糙度高度 k 、等效砂粒粗糙度的比率 k_s/k 、表面修正系数 S_{corr} 三种不确定参数作为 RANS 的热校正模型(HAX 模型^[95]和 2PP 模型^[96])的输入进行结冰模拟,通过建立非侵入多项式混沌元模型^[97]量化粗糙度不确定性引起的冰吸积特性,并引入 Sobol 灵敏度分析^[98-100],识别最有影响力的参数。

图 7 和表 2 中的结果表明,图中 S^{tot} 表示全局

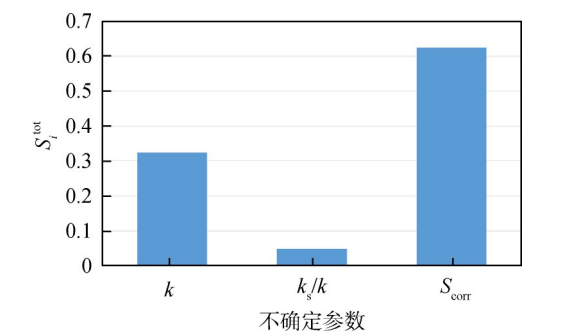


图 7 2 阶元模型和 HAX 热修正模型的全局 Sobol 灵敏度指数^[94]

Fig.7 Total Sobol sensitivity indexes for 2-order metamodel and the HAX thermal correction model^[94]

表 2 各阶元模型的全局 Sobol 灵敏度指数^[94]
Table 2 Total Sobol sensitivity indexes for each metamodel^[94]

元模型	目标输出信息	HAX Sobol 指数	2PP Sobol 指数
1 阶元模型	在 $x_c=11.36\text{ cm}$ 处的传热系数	$k=0.239$ $k_s/k=0.051$ $S_{\text{corr}}=0.787$	$k=0.820$ $k_s/k=0.271$
2 阶元模型	在 $x_c=14.29\text{ cm}$ 处的传热系数	$k=0.239$ $k_s/k=0.050$ $S_{\text{corr}}=0.787$	$k=0.802$ $k_s/k=0.291$
3 阶元模型	在 $x_c=27.48\text{ cm}$ 处的传热系数	$k=0.248$ $k_s/k=0.052$ $S_{\text{corr}}=0.779$	$k=0.756$ $k_s/k=0.341$
4 阶元模型	最大结冰厚度	$k=0.326$ $k_s/k=0.072$ $S_{\text{corr}}=0.682$	$k=0.894$ $k_s/k=0.202$
5 阶元模型	结冰延伸	$k=0.166$ $k_s/k=0.088$ $S_{\text{corr}}=0.882$	$k=0.912$ $k_s/k=0.288$

Sobol 灵敏度指数。对于 HAX 模型而言,表面修正系数 S_{corr} 对最大结冰厚度和结冰延伸影响程度最大,贡献率分别高达 68% 和 82%;然而,对于 2PP 模型而言,粗糙度高度 k 成为影响最大结冰厚度和结冰延伸的主要因素,其中对最大结冰厚度的贡献度约为 89%,对结冰延伸的贡献约为 91%(详见表 2)。

随后,他们将温度的不确定性考虑在内时,发现,自由流温度对结冰影响较小(见图 8)。与图 7 相比较,还可以注意到,尽管考虑了温度的不确定

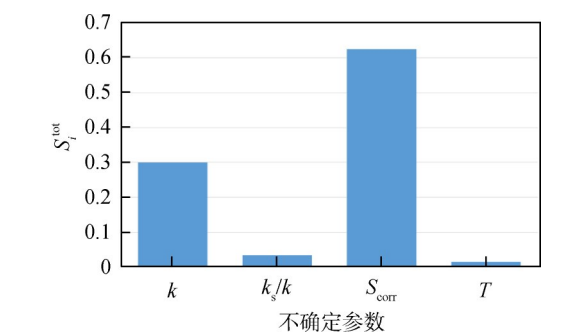


图 8 温度的 2 阶元模型和 HAX 热修正模型的全局 Sobol 灵敏度指数^[94]

Fig.8 Total Sobol sensitivity indexes for 2-order metamodel of temperature and the HAX thermal correction model^[94]

性,但粗糙度参数对最大结冰厚度和结冰延伸的影响程度几乎保持不变。

从表 3 的结果也可以看出,温度是影响最小的参数,对 HAX 模型而言,温度的影响可以忽略不计;而在 2PP 模型中,粗糙度高度相比于自由流温度对最大结冰厚度和结冰延伸的影响程度而言更重要。

表 3 温度影响的全局 Sobol 灵敏度指数 ^[94]			
Table 3 Total Sobol sensitivity indexes for the temperature effect ^[94]			
元模型	目标输出信息	HAX Sobol 指数	2PP Sobol 指数
2 阶温度元模型	最大结冰厚度	$k=0.302$	$k=0.750$
		$k_s/k=0.067$	$k_s/k=0.170$
		$S_{\text{corr}}=0.667$	$T=0.162$
		$T=0.039$	
3 阶温度元模型	结冰延伸	$k=0.190$	$k=0.681$
		$k_s/k=0.050$	$k_s/k=0.255$
		$S_{\text{corr}}=0.784$	$T=0.176$
		$T=0.022$	

3.2 冰形不确定性对气动性能的影响

文章第 3.1 节介绍了结冰条件不确定性对冰形影响的研究进展,本节将对当前冰形不确定性对气动性能影响的相关研究工作展开叙述。徐文丰等^[101]分析了结冰的不确定性作用对飞机包线安全的影响。黄冉冉等^[102]在研究角冰表面粗糙度对翼型气动损失的影响中指出,结冰的几何外形是影响翼型气动性能的主要因素,而冰形粗糙度参数的影响基本可以忽略。Papadakis 等^[103]的研究结论表明结冰角冰的高度、位置和角度是影响翼型气动性能的重要冰形特征。Degennaro 等^[104]以脊冰和角冰为例,使用基于随机配置法的 PCE 量化脊冰和角冰的不确定性对飞机 $C_{L,\text{max}}$ (稳定流场下的最大升力系数)、 α_{max} (临界攻角)、 L/D_{max} (最大升阻比)等气动性能的影响。从他们的研究结果中可以看出,对于脊冰而言,脊冰的半径 R 是影响飞机气动性能的主导参数,而脊冰的位置 S_r 对气动性能的影响较小(见图 9,其中 dR 、 dS_r 分别表示 R 和 S_r 的扰动, μ_R 表示 R 的均值, δ_R^2 、 $\delta_{S_r}^2$ 则分别表示 R 和 S_r 的方差,且图中灰度由暗到明的变化表示 dS_r 的增大);对于角冰而言,角冰的高度 h 是影响飞机气动性能的主导参数,而角冰

之间的距离 s 对飞机气动性能的影响较小(见图 10,图中灰度由暗到明的变化表示 s 的增大)。

在量化脊冰的半径 R 和位置 S_r 对气动性能的影响时,他们还给出了 PCE 方法和 MC 方法的统计矩比较(见表 4),证明了 PCE 方法对于典型机

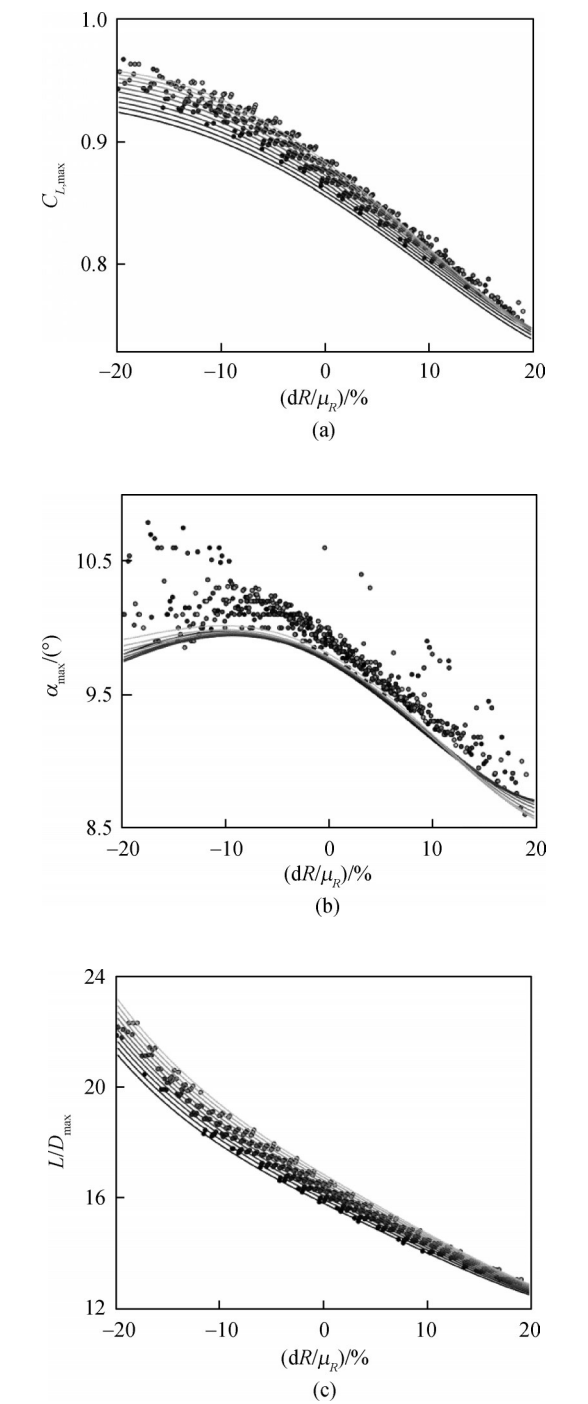


图 9 $(\delta_R^2, \delta_{S_r}^2)=(10\%, 1.25\%)$ 条件下,脊冰不确定性对气动性能的影响^[104]

Fig.9 Effect of ridge ice uncertainty on aerodynamic performance, corresponding to $(\delta_R^2, \delta_{S_r}^2)=(10\%, 1.25\%)$ ^[104]

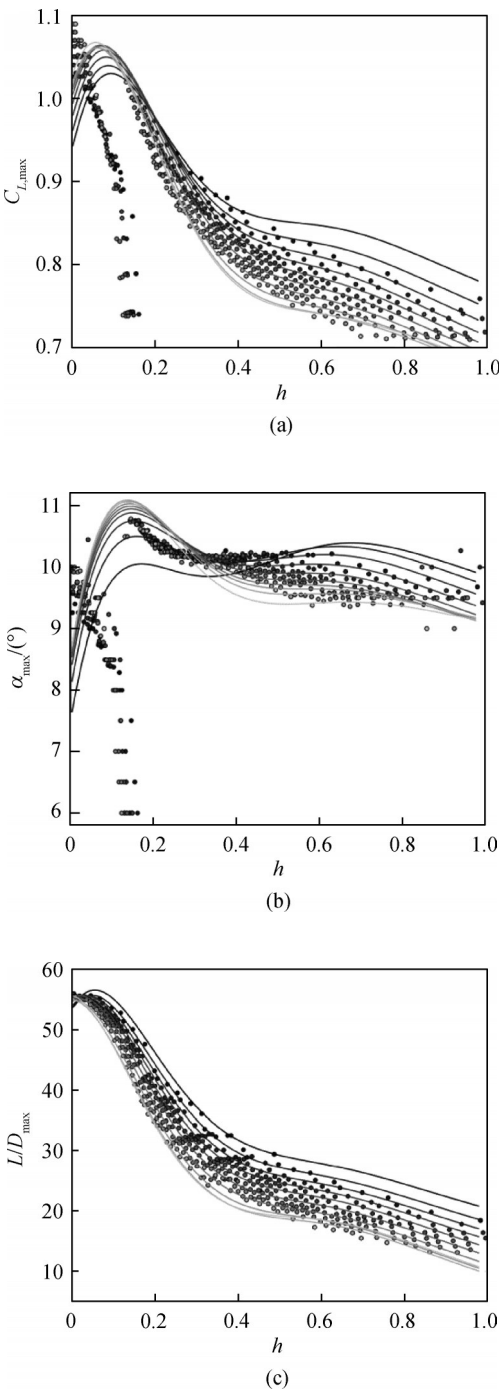


图 10 角冰不确定性对气动性能的影响^[104]
Fig.10 Effect of horn ice uncertainty on aerodynamic performance^[104]

翼结冰不确定性量化问题比 MC 方法更有效。

虽然在给定冰形参数不确定性的情况下，PCE 方法可以有效、准确地量化这些不确定性对气动性能的影响，但是所研究的冰的形状并不反映实际冰的形状。因此 Degennaro 等^[105]又在此基础上做了进一步的工作，提出将整个不确定性量化方法扩展到分析“真实”数据上，并详细介绍了

表 4 MC 方法和 PCE 方法的统计矩比较^[104]
Table 4 Comparison of statistical moments for MC and PCE methods^[104]

要素	$C_{L, \max}$		$\alpha_{\max}/(^{\circ})$		$L/D_{\max}$	
	MC	PCE	MC	PCE	MC	PCE
均值	0.87	0.86	9.8	9.6	16.6	16.5
方差	0.002	0.003	0.16	0.13	4.0	4.4
偏度	-0.33	-0.37	-0.5	-0.9	0.56	0.40
峰度	2.3	2.2	2.9	2.7	3.0	2.6

基于纯数据驱动的结冰模型。他们首先通过对特定冰形状的数据集使用正交分解(POD)来识别低维形状参数,并使用 PCE 方法获得 POD 模式下冰形状参数和气动性能之间的映射,在参数空间执行不确定性量化,得出升力随着冰质量的增加而减小的结论(详见图 11^[105],红到绿的变化表示升力系数从低到高的转变)。

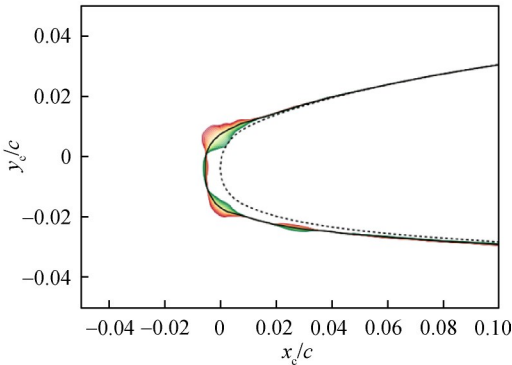
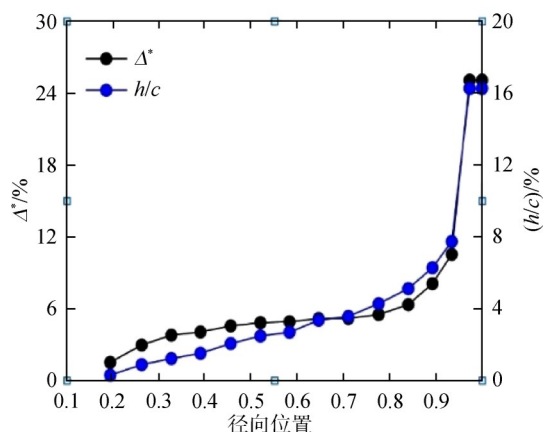


图 11 局部灵敏度:关于不确定参数冰形状对应的升力梯度^[105]
Fig.11 Local sensitivity: ice shapes corresponding to the gradient of lift with respect to the uncertain parameters^[105]

除此之外,2019 年 Tabatabaei 等^[106]使用 PCE 技术量化结冰不确定性对翼型气动性能的影响,并通过 CFD 模拟获得 NREL 5MW 型风力机叶片气动性能数据,并得到了与 Degennaro 等相似的结论,即随着结冰量的增加,升力系数在不断地减小,而阻力系数在不断地增加。此外,他们还得到积冰角冰高度是影响风力机载荷损失的主要参数的结论,并且随着角冰高度的增加,载荷损失 Δ^* 也相应增加,两者之间的相关性可以通过图 12 体现。

图12 相应角冰高度下载荷损失的径向分布^[106]Fig.12 Radial distribution of power loss regarding the relative ice horn height^[106]

3.3 结冰条件不确定性对气动性能的影响

目前,有关于结冰条件对翼型气动性能影响的研究中,Bose^[107]分析了自然环境下风力机结冰冰形对风力机性能的影响。Hochart等^[108]采用风洞试验研究了来流条件对风力机叶片结冰冰形的影响以及结冰对风力机气动性能的影响。王晓东等^[109]针对NREL S825翼型进行翼型结冰过程的确定性CFD模拟,在保证其他结冰参数相同的条件下,证实了攻角的不同会导致翼型表面结冰的形状和位置也有所不同。但是,以上的研究工作都是对结冰的形成以及产生的不同冰形对翼型气动性能影响的确定性数值模拟,缺乏结冰条件对翼型气动性能影响的不确定性量化分析。因此,王晓东等又在翼型结冰过程的确定性CFD模拟基础上,充分考虑了攻角和速度的不确定性,并采

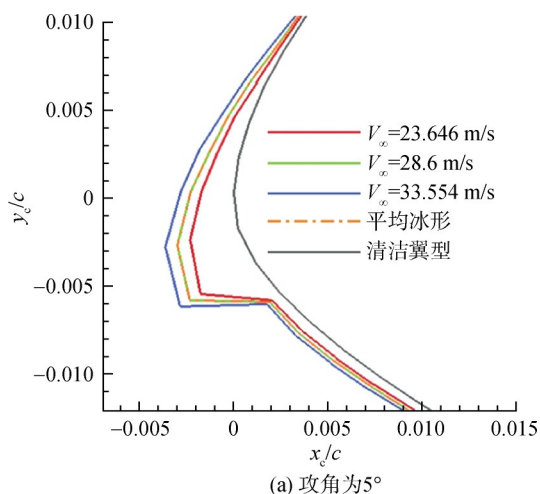
用随机配置点法来研究攻角和来流风速发生不确定性波动对结冰形状和气动性能造成的影响。他们的研究结论如下。

图13表明,在5°小攻角下,当来流风速(V_∞)发生波动时,结冰的位置和形状变化均不大,但是在12°大攻角下,结冰的冰形出现了比较明显的变化,表明在大攻角下,结冰的冰形对来流风速的随机变化更敏感。图14则给出了5°攻角和12°攻角条件下,来流风速对升阻力特性的影响。在同一攻角下,图中升力系数(C_L)和阻力系数(C_D)的统计均值均与确定性计算结果吻合良好,说明来流风速对升力系数和阻力系数的影响较小。

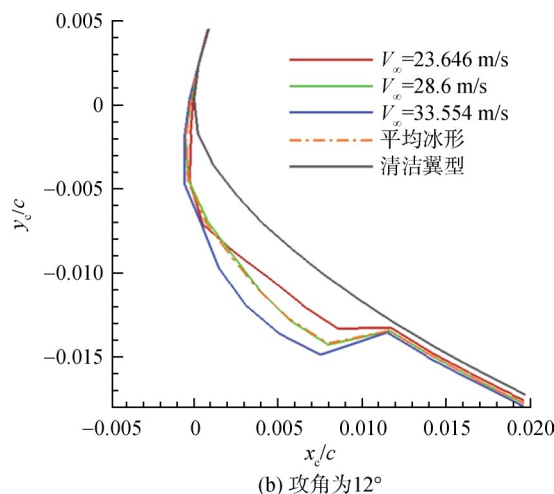
从图15中可以看出,当攻角发生波动时,翼型上结冰的位置和冰形发生了明显的变化,随着攻角的增加,对结冰的影响主要体现在结冰位置逐渐向翼型下表面移动。结合图13进行分析,可以发现攻角不确定性对结冰位置和冰形的影响比来流风速不确定性对结冰的位置和冰形的影响更大。

图16则给出了攻角具有不确定性时两个特征工况下升阻力系数的统计均值及99%置信区间。从图16中可以看出随着攻角的增加,升力系数的统计均值与确定性结果开始出现偏差,而阻力系数的统计均值与确定性结果吻合良好,表明攻角不确定性波动对升力系数的影响较大,但是对阻力系数的影响较小。

图14和图16分别给出了来流风速和攻角不确定性变量对气动性能的影响,但是并未考虑两者的共同作用,而图17则比较了单个不确定性变

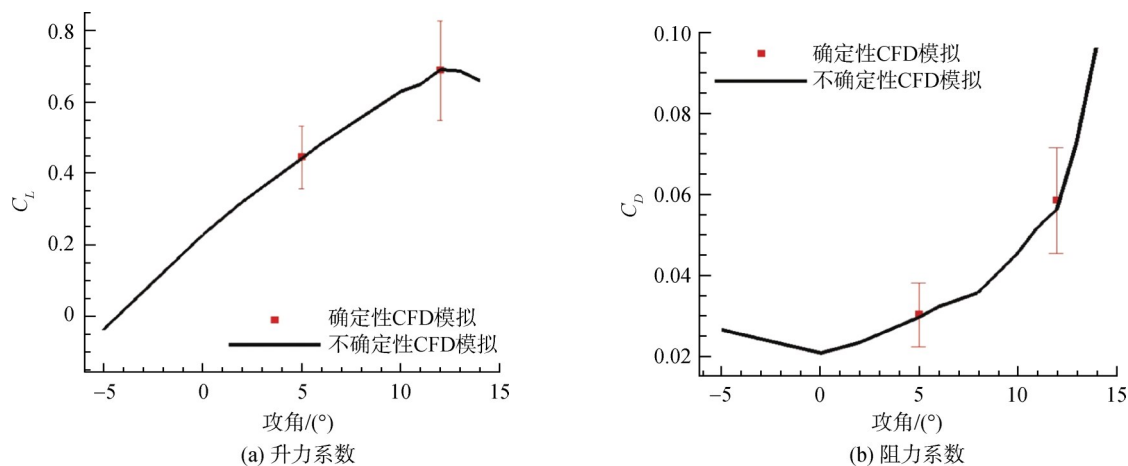
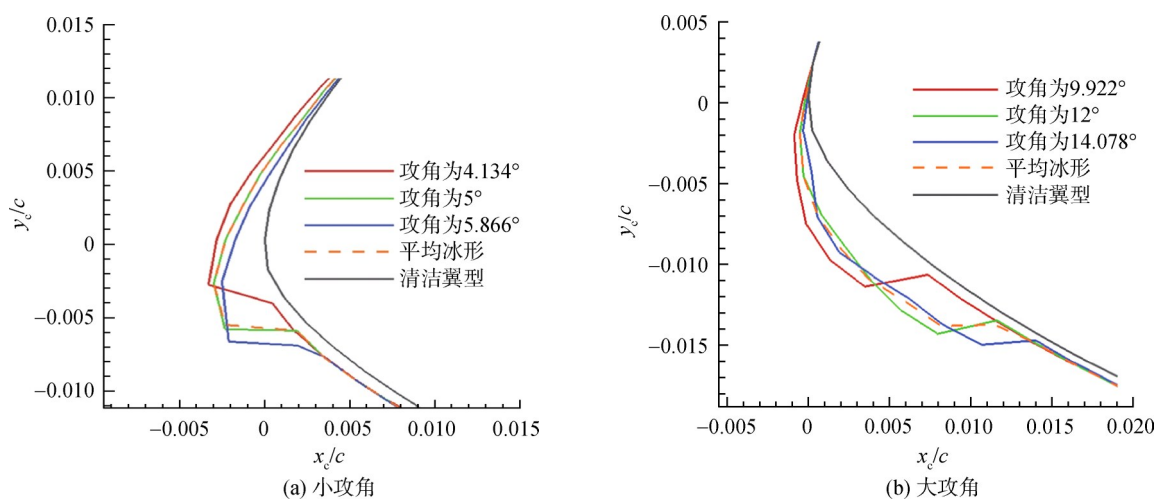
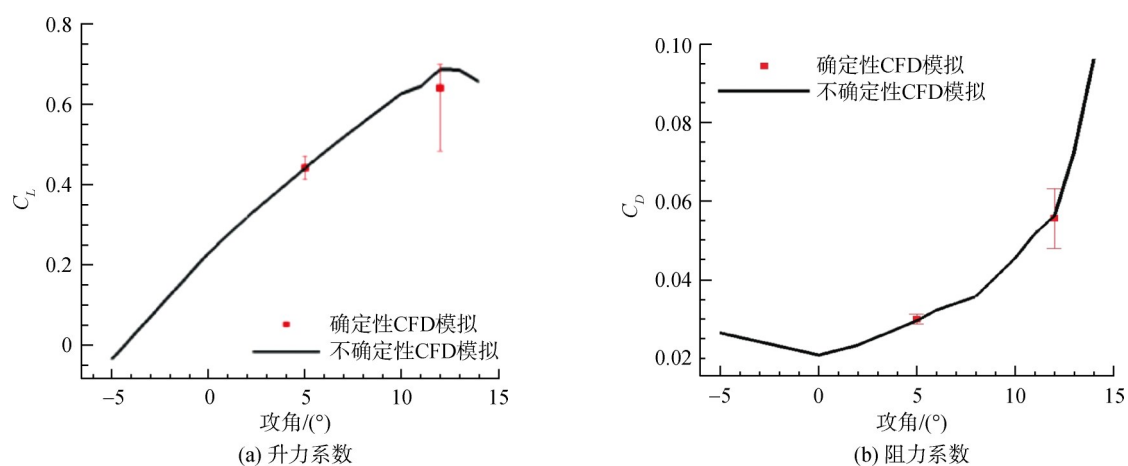


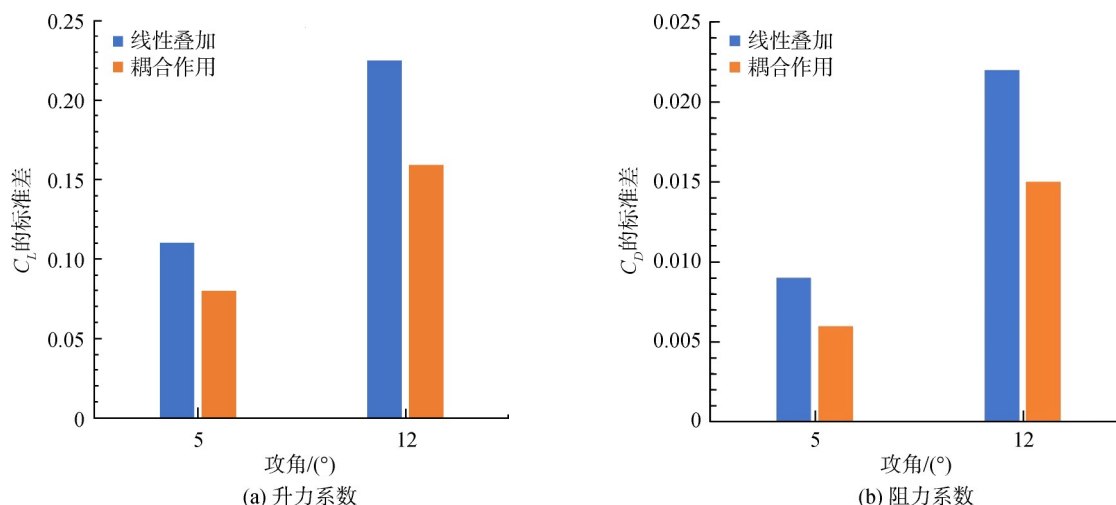
(a) 攻角为5°



(b) 攻角为12°

图13 5°和12°攻角下速度不确定性对翼型结冰冰形的影响^[109]Fig.13 Effect of velocity uncertainty on ice shape of airfoil at 5° and 12° attack angles^[109]

图 14 速度不确定性对升阻力特性的影响(99% 置信区间)^[109]Fig.14 Effect of speed uncertainty on lift and drag characteristics (99% confidence interval)^[109]图 15 攻角不确定性对翼型结冰冰形的影响^[109]Fig.15 Effect of attack angle uncertainty on airfoil icing^[109]图 16 攻角不确定性对升阻力特性的影响(99% 置信区间)^[109]Fig.16 Effect of attack angle uncertainty on lift and drag characteristics (99% confidence interval)^[109]

图17 不确定性变量独立作用与同时作用影响比较^[109]Fig.17 Comparison of independent and simultaneous effects of uncertainty^[109]

量作用结果线性叠加后与两个不确定性量同时作用的结果下升力系数和阻力系数的标准差。从图中可以看出,速度和攻角不确定性变量的共同作用对升力系数和阻力系数的影响均弱于两个不确定变量作用结果线性叠加后的影响,说明风速和攻角的耦合作用会在一定程度上削弱不确定性对翼型气动特性的影响。

4 结论与展望

现有的关于结冰不确定性量化的研究,得到了结冰条件对结冰和气动性能的影响,对深入认识结冰发生机理、影响机制有促进作用,对结冰试验的能力提升、数值模拟的精度提高有启发意义。虽然,近年来飞机结冰的不确定性量化研究已经越来越受到国内外学者的重视,但是不确定性量化在飞机结冰中的应用尚处于起步阶段,仍然存在许多需要深入研究的问题。针对国内外结冰不确定性量化的研究进展和成果的分析,提出以下几点需要引起关注的问题:

1) 结冰研究手段

当前,主流的飞机结冰计算方法仍然是采用单步法将空气流场、水滴场、结冰、结冰影响进行解耦计算,忽视了结冰生长过程对空气流场和水滴收集速率的影响,这与真实的结冰过程存在偏差,弱化了不确定性因素在结冰过程中传播时所起的作用,造成计算结果缺乏足够的精度。多步法虽然可以通过采用步进方式计算空气流场和水滴场,提高计算结果的精度,但极大地增加了计算成本。考虑到飞机结冰过程是一个非定常过程,

可以通过对比单步法和多步法的计算结果,确定合适的时间步长,在确保计算精度的前提下减小计算成本。

2) 结冰发生部位

结冰发生部位不同对飞机飞行安全性能的影响也不同,风挡结冰会遮挡驾驶员的视线、机翼结冰会改变飞机的气动特性、发动机进气口结冰会造成推力损失,空速管结冰会导致仪表失真。为保证飞机飞行安全,这些关键部位通常都会设置防/除冰系统。目前关于飞机结冰部位的不确定性量化研究主要针对机翼展开,缺乏对其他关键部位的相关研究工作,后期继续关注这些关键部位结冰的不确定性影响,为更精细化的防/除冰系统的设计提供支撑。

3) 结冰条件多因素影响

自然条件下,飞机结冰受来流条件不确定性因素的影响较大。目前,已经逐步开展了水滴中值粒径、温度、来流风速等单一不确定性因素对结冰冰形影响的研究,尚未将大气压力、液态水含量等不确定性因素考虑在内,更缺乏不确定性因素之间的关联分析。为更好地应对飞行环境变化带来的风险,未来需要进一步量化更多不确定性因素以及多因素共同作用的影响。

4) 结冰不确定性量化方法

当前,使用PCE方法量化结冰不确定性是在假定不确定输入变量服从高斯分布的条件下进行的,为了使不确定性量化过程更贴近真实情形,需要进一步发展不确定性量化方法来摆脱这一前提条件的束缚,而基于数据驱动的多项式混沌方法

是目前比较好的解决方法。其次,随着飞机结冰领域研究工作的深入开展,需要对飞机结冰过程开展全局不确定性量化分析,由此导致的不确定性变量的增加,势必会使不确定性量化的计算量急剧增加,为了应对计算量增加带来的挑战,需要进一步提升不确定性量化方法的计算效率,比如结合智能学习算法,建立新的代理模型来代替原本复杂的数值模拟系统从而减小计算量。

参考文献:

- [1] 陈维建.飞机机翼结冰的数值模拟研究[D].南京:南京航空航天大学,2007.
CHEN Weijian. Numerical simulation of aircraft wing icing [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007. (in Chinese)
- [2] 苏媛,徐忠达,吴桢龙.飞机结冰后若干飞行力学问题综述[J].航空动力学报,2014,29(8):1878-1893.
SU Yuan, XU Zhongda, WU Zhenlong. Overview of several ice accretion effects on aircraft flight dynamics[J]. Journal of Aerospace Power, 2014, 29(8):1878-1893. (in Chinese)
- [3] REEHORST A L, ADDY H E, COLANTONIO R O. Examination of icing induced loss of control and its mitigations [R]. AIAA-2010-8140, 2010.
- [4] ZHANG F, HUANG Z, YAO H, et al. Icing severity forecast algorithm under both subjective and objective parameters uncertainties[J]. Atmospheric Environment, 2016, 128: 263-267.
- [5] BRAGG M B, BROEREN A P, BLUMENTHAL L A. Iced airfoil aerodynamics[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2005, 41(5):323-362.
- [6] 易贤,桂业伟,朱国林,等.运输机翼型结冰的计算和实验[J].航空动力学报,2011,26(4):808-813.
YI Xian, GUI Yewei, ZHU Guolin, et al. Experiment and computational investigation into ice accretion on airfoil of a transport aircraft[J]. Journal of Aerospace Power, 2011, 26(4):808-813. (in Chinese)
- [7] 田永强,蔡晋生,张正科,等.结冰风洞实验中的相似理论[J].北京航空航天大学学报,2020,46(2):359-370.
TIAN Yongqiang, CAI Jinsheng, ZHANG Zhengke, et al. Similarity theory in icing wind tunnel test[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2020, 46(2):359-370. (in Chinese)
- [8] 姚若鹏.翼型的结冰数值模拟及相关控制研究[D].南京:南京航空航天大学,2012.
YAO Ruopeng. The numerical simulation of ice accretion on airfoil and control research[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007. (in Chinese)
- [9] YAN L, SUN C, YU J, et al. Scaling method of the rotating blade of a wind turbine for a rime ice wind tunnel test[J]. Energies, 2019, 12(627):1-15.
- [10] 李哲,徐浩军,薛源,等.结冰对飞机飞行安全的影响机理与防护研究[J].飞行力学,2016,34(4):10-14.
LI Zhe, XU Haojun J, XUE Yuan, et al. Research on flight safety effect mechanism and protection for aircraft icing[J]. Flight Dynamics, 2016, 34(4):10-14. (in Chinese)
- [11] 林贵平.飞机结冰与防冰技术[M].北京:北京航空航天大学出版社,2016.
- [12] 薛源,徐浩军,裴彬彬,等.基于蒙特卡洛法的飞机结冰后动力学特性分析[J].实验流体力学,2016,30(2):26-31,37.
XUE Yuan, XU Haojun, PEI Binbin, et al. Dynamic characteristics analysis after aircraft icing based on Monte Carlo method[J]. Journal of Experiments in Fluid Mechanics, 2016, 30(2):26-31, 37. (in Chinese)
- [13] SAEED F, SELIG M S, BRAGG M B. A design procedure for subscale airfoils with full-scale leading edges for ice accretion testing[R]. AIAA-96-0635, 1996.
- [14] RUFF G A, ANDERSON D N. Quantification of ice Accretions for icing scaling evaluations[R]. AIAA-98-0195, 1998.
- [15] 马军林,肖京平,王桥,等.飞机结冰相似准则研究进展[J].飞行力学,2019,37(4):1-7.
MA Junlin, XIAO Jingping, WANG Qiao, et al. Advances in the study of aircraft icing similarity criteria[J]. Flight Dynamics, 2019, 37(4):1-7. (in Chinese)
- [16] GRAY V H, GLAHN U H V. Effect of ice and frost formations on drag of NACA 65₁-212 airfoil for various modes of thermal ice protection[R]. NACA-TN-2962, 1953.
- [17] GRAY V H, VONGLAHN U H. Aerodynamic effects caused by icing of an unswept NACA 65A004 airfoil[R]. NACA-TN-4155, 1958.
- [18] GRAY V H. Correlations among ice measurements, impingement rates icing conditions, and drag coefficients for unswept NACA 65A004 airfoil[R]. NACA-TN-4151, 1958.
- [19] MILLER D R, POTAPCZUK M G, LANGHALS T J. Preliminary investigation of ice shape sensitivity to parameter variations[R]. AIAA-2005-0073, 2005.
- [20] MILLER D R, POTAPCZUK M G, LANGHALS T J. Additional investigations of ice shape sensitivity to parameter variations[R]. AIAA-2006-0469, 2006.
- [21] SCHAEFER J A, ROMERO V J, SCHAEFER S R, et al. Approaches for quantifying uncertainties in computational modeling for aerospace applications[R]. AIAA-2020-1520, 2020.
- [22] 陈鑫,王刚,叶正寅,等.CFD不确定度量化方法研究综述[J].空气动力学报,2021,39(4):1-13.
CHEN Xin, WANG Gang, YE Zhenyin, et al. A review of uncertainty quantification methods for computational fluid dynamics[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2021, 39(4):1-13. (in Chinese)
- [23] MACARTHUR C D. Numerical simulation of airfoil ice accretion[R]. AIAA-83-0112, 1983.
- [24] MESSINGER B. Equilibrium temperature of an unheated icing surface as a function of air speed[J]. Journal of the Aeronautical Sciences, 1953, 20(1):29-42.
- [25] MYERS T G. Extension to the messinger model for aircraft

- icing[J].AIAA Journal, 2001, 39(2):211-218.
- [26] FORTIN G, ILINCA A, LAFORTE J L, et al. Prediction of 2D airfoil ice accretion by bisection method and by rivulets and beads modeling[R].AIAA-2003-1076, 2003.
- [27] ANDERSON D N, TSAO J C. Additional results of ice accretion scaling at SLD conditions[R]. AIAA-2003 - 0390, 2003.
- [28] LANGMUIR I, BLODGETT K B. A mathematical investigation of water droplet trajectories[R]. Army Air Forces Technical Report NO. 5418, 1946.
- [29] 任靖豪, 易贤, 王强, 等. 复杂构型水滴收集率的拉格朗日计算方法[J]. 航空动力学报, 2020, 35(12):2553-2561.
- REN Jinghao, YI Xian, WANG Qiang, et al. Lagrangian simulation method of droplet collection efficiency for complex configuration[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(12): 2553-2561. (in Chinese)
- [30] 阎超. 计算流体力学方法及应用[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2006.
- [31] BILODEAU D. An Eulerian framework for supercooled large droplets splashing and bouncing[D]. Montreal, Canada: McGill University, 2014.
- [32] BOURGAULT Y, HABASHI W G, DOMPIERRE J, et al. A finite element method study of Eulerian droplets impingement models[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1999, 29(4):429-449.
- [33] BOURGAULT Y, BOUTANIOS Z, HABASHI W G. Three dimensional Eulerian approach to droplet impingement simulation using FENSAP-ICE: Part 1 model, algorithm and Validation[J]. Journal of Aircraft, 2000, 37(1): 95-103.
- [34] SCHAEFER J A, HOSDER S, MANI M, et al. The effect of grid topology and flow solver on turbulence model closure coefficient uncertainties for a transonic airfoil[R]. AIAA - 2016-4400. 2016.
- [35] CULLEN A, FREY H C. Probabilistic techniques in exposure assessment: a handbook for dealing with variability and uncertainty in models and inputs[M]. New York: Plenum Press, 1999.
- [36] XU C, QU A, LI H. A study on the foundations of probability theory[J]. Pure and Applied Mathematics, 2007, 23(4): 453-457.
- [37] WIENER N. The homogeneous chaos[J]. American Journal of Mathematics, 1938, 60(4):897-936.
- [38] VAN KAMPEN N G, REINHARDT W P. Stochastic processes in physics and chemistry[J]. Physics Today, 1983, 36(2), 78-80.
- [39] LUO M, WEI H. A new logic for uncertainty[EB/OL]. [2021-10-17]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1506.03123>.
- [40] 王鹏, 修东滨. 不确定性量化导论[M]. 北京:科学出版社, 2019.
- [41] SULLIVAN T J. Introduction to uncertainty quantification[M]. Berlin:Springer, 2015.
- [42] 汤涛, 周涛. 不确定性量化的高精度数值方法和理论[J]. 中国科学:数学, 2015, 45(7):891-928.
- TANG Tao, ZHOU Tao. Recent developments in high order numerical methods for uncertainty quantification[J]. Science China:Math, 2015, 45(7):891-928. (in Chinese)
- [43] FISHMAN G S. Monte Carlo: concepts, algorithms, and applications[M]. Berlin:Springer, 1996.
- [44] LE MAÎTRE O P, KNIO O M. Spectral methods for uncertainty quantification: with applications to computational fluid dynamics[M]. Berlin:Springer, 2010.
- [45] KELLER A. Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods[M]. Berlin:Springer, 2020.
- [46] LI J, WINKER P. Time series simulation with quasi-Monte Carlo methods[J]. Computational Economics, 2003, 21:23-24.
- [47] STEIN M. Large sample properties of simulations using Latin hypercube sampling[J]. Technometrics, 1987, 29(2):143-151.
- [48] WEI-LIEM L. On Latin hypercube sampling[J]. Annals of Statistics, 1996, 24(5):2058-2080.
- [49] GHANEM R, SPANOS P D. Stochastic finite elements: a spectral approach[M]. Berlin:Springer-Verlag, 1991.
- [50] GHANEM R. Stochastic finite elements with multiple random non-Gaussian properties[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1999, 125(1):26-40.
- [51] GHANEM R. Scales of fluctuation and the propagation of uncertainty in random porous media[J]. Water Resources Research, 1998, 34(9):2123-2136.
- [52] GHANEM R, RED-HORSE J. Propagation of probabilistic uncertainty in complex physical systems using a stochastic finite element approach[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1999, 133(1/2/3/4):137-144.
- [53] XIU D, KARNIADAKIS G E. The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2002, 24(2):619-644.
- [54] WAN X, KARNIADAKIS G E. An adaptive multi element generalized polynomial chaos method for stochastic differential equations[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 209(2):617-642.
- [55] WAN X, KARNIADAKIS G E. Multi-element generalized polynomial chaos for arbitrary probability measures[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2006, 28(3):901-928.
- [56] PREMPRANEERACH P, HOVER F S, TRIANTAFYLLOU M S, et al. Uncertainty quantification in simulations of power systems: multielement polynomial chaos methods[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2010, 95(6): 632-646.
- [57] XIU D. Fast numerical methods for stochastic computations: a review[J]. Communications in Computational Physics, 2010, 5(2/3/4):242-272.
- [58] SOIZE C, GHANEM R. Physical systems with random uncertainties: chaos representations with arbitrary probability measure[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2004, 26(2):395-410.
- [59] WITTEVEEN J A S, BIJL H. Reliable computational predictions by modeling uncertainties using arbitrary polynomial

- chaos[R]. Delft, Netherland: European Conference on Computational Fluid Dynamics, 2006.
- [60] WITTEVEEN J A S, SARKAR S, BIJL H. Modeling physical uncertainties in dynamic stall induced fluid-structure interaction of turbine blades using arbitrary polynomial chaos [J]. *Computers and Structures*, 2007, 85 (11/12/13/14): 866-878.
- [61] ERNST O G, MUGLER A, STARKLOFF H J, et al. On the convergence of generalized polynomial chaos expansions [J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 229 (2): 3134-3154.
- [62] OLADYSHKIN S, NOWAK W. Data-driven uncertainty quantification using the arbitrary polynomial chaos expansion [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2012, 106: 179-190.
- [63] LING G, LIU Y, TAO Z. Data-driven polynomial chaos expansions: a weighted least-square approximation [J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, 381: 129-145.
- [64] 金冶书. 基于数据驱动的多保真稀疏多项式逼近及其在不确定性量化中的应用[D]. 上海: 上海师范大学, 2019.
- JING Yesu. Data-driven multi-fidelity sparse polynomial approximation and its application in uncertainty quantification [D]. Shanghai: Shanghai Normal University, 2019. (in Chinese)
- [65] LIU Z, CHOE Y. Data-driven sensitivity indices for models with dependent inputs using the polynomial chaos expansion [J]. *Structural Safety*, 2020, 88: 1-10.
- [66] CHEN M, GUO T, CHEN C, et al. Data-driven arbitrary polynomial chaos expansion on uncertainty quantification for real-time hybrid simulation under stochastic ground motions [J]. *Experimental Techniques*, 2020, 44(1): 1-12.
- [67] AHLFELD R, BELKOUCHI B, MONTOMOLI F. SAM-BA: sparse approximation of moment based arbitrary polynomial chaos [J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 320: 1-16.
- [68] COHEN A, DEVORE R, SCHWAB C. Convergence rates of best N-term Galerkin approximations for a class of elliptic SPDEs [J]. *Foundations of Computational Mathematics*, 2010, 10(6): 615-646.
- [69] NEDAIASL K, DEHBOZORGI R. Galerkin finite element method for nonlinear fractional differential equations [J]. *Numerical Algorithms*, 2021, 88(1): 113-141.
- [70] 董世充. 风力机翼型的不确定性 CFD 模拟研究[D]. 北京: 华北电力大学, 2015.
- DONG Shichong. Non-deterministic CFD simulations of wind turbine airfoil [D]. Beijing: North China Electric Power University, 2015. (in Chinese)
- [71] SMOLYAK S A. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions [J]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1963, 4(5): 240-243.
- [72] NOBILE F, TEMPONERAÜL, WEBSTER C G. An anisotropic sparse grid stochastic collocation method for partial differential equations with random input data [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2008, 46(5): 2411-2442.
- [73] XIANG M, ZABARAS N. An adaptive high-dimensional stochastic model representation technique for the solution of stochastic partial differential equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(10): 3884-3915.
- [74] DAI Y, CHAO Y. Smolyak-grid-based flutter analysis with the stochastic aerodynamic uncertainty [J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2014, 2014: 174927.1-174927.8.
- [75] NABILE F, TEMPONE R, WEBSTER C G. A sparse grid stochastic collocation method for partial differential equations with random input data [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2008, 46(5): 2309-2345.
- [76] GANAPATHYSUBRAMANIAN B, ZABARAS N. Sparse grid collocation schemes for stochastic natural convection problems [J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, 225 (1): 652-685.
- [77] COHEN A, DAVENPORT M A, LEVIATAN D. On the stability and accuracy of least squares approximations [J]. *Foundations of Computational Mathematics*, 2013, 13 (5): 819-834.
- [78] HOSDER S, WALTERS R W, BALCH M. Point collocation nonintrusive polynomial chaos method for stochastic computational fluid dynamics [J]. *AIAA Journal*, 2010, 48 (12): 2721-2730.
- [79] MIGLIORATI G, NOBILE F, SCHWERIN E V, et al. Analysis of the discrete L^2 projection on polynomial spaces with random evaluations [J]. *Foundations of Computational Mathematics*, 2014, 14: 419-456.
- [80] ZHOU T, NARAYAN A, XU Z. Multivariate discrete least-squares approximations with a new type of collocation grid [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2014, 36 (5): 1-20.
- [81] DONOHO D L. Compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [82] TODOR R A, SCHWAB C, et al. Convergence rates for sparse chaos approximations of elliptic problems with stochastic coefficients [J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2007, 27(2): 232-261.
- [83] FIGUEIREDO M, NOWAK R D, WRIGHT S J. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2008, 1(4): 586-597.
- [84] GREGORY N, O'REILLY C L. Low-speed aerodynamic characteristics of NACA 0012 airfoil section, including the effects of upper-surface roughness simulating hoar frost [R]. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda NO.3726, 1970.
- [85] SHIN J. Characteristics of surface roughness associated with leading edge ice accretion [J]. *Journal of Aircraft*, 1996, 33(2): 316-321.
- [86] 朱程香, 孙志国, 付斌, 等. 水滴多尺寸分布对水滴撞击特性和结冰增长的影响 [J]. *南京航空航天大学学报*, 2010, 42 (5): 620-624.

- ZHU Chengxiang, SUN Zhiguo, FU Bin, et al. Effects of multi-dispersed droplet impingement and ice accretion[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010, 42(5):620-624. (in Chinese)
- [87] 易贤, 王开春, 马洪林, 等. 大型风力机结冰过程水滴收集率三维计算[J]. 空气动力学学报, 2013, 31(6):745-751.
- YI Xian, WANG Kaichun, MA Honglin, et al. 3-D numerical simulation of droplet collection efficiency in large-scale wind turbine icing[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2013, 31(6):745-751. (in Chinese)
- [88] 张建荣. 气象条件对飞机及其飞行的影响分析[J]. 航空科学技术, 2014(5):54-56.
- ZHANG Jianrong. Impact analysis of weather conditions on aircraft and its flight[J]. Aeronautical Science and Technology, 2014, 25(5):54-56. (in Chinese)
- [89] FENG K, LU Z, YUN W. Aircraft icing severity analysis considering three uncertainty types[J]. AIAA Journal, 2019, 57(4):1514-1522.
- [90] 李佩哲. 面向自然结冰试飞的翼型结冰数值模拟研究[D]. 上海:上海交通大学, 2019.
- LI Peizhe. Numerical simulation of wing icing for natural icing flight test[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2019. (in Chinese)
- [91] CAO Y, CHAO M, QIANG Z, et al. Numerical simulation of ice accretions on an aircraft wing[J]. Aerospace Science and Technology, 2012, 23(1):296-304.
- [92] 严晓雪. 机翼结冰粗糙度及对流换热研究[D]. 南京:南京航空航天大学, 2016.
- YAN Xiaoxue. Research of surface roughness and convective heat transfer on airfoil icing[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2016. (in Chinese)
- [93] YAN L, CHAO W, CHANG S N, et al. Simulation of ice accretion based on roughness distribution[J]. Procedia Engineering, 2011, 17:160-177.
- [94] KEVIN I, FRANÇOIS M, HÉLOÏSE B. Sensitivity study of ice accretion simulation to roughness thermal correction model[J]. Aerospace, 2021, 8(3):1-20.
- [95] AUPOIX B. Improved heat transfer predictions on rough surfaces[J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2015, 56:160-171.
- [96] MORENCY F, BEAUGENDRE H. Comparison of turbulent prandtl number correction models for the Stanton evaluation over rough surfaces[J]. International Journal of Computation Fluid Dynamics, 2020, 34(10):1-21.
- [97] MARELLI S, SUDRET B. UQLab user manual-polynomial chaos expansions[R]. Zurich: Chair of Risk, Safety and Uncertainty Quantification, ETH Zurich, 2015.
- [98] KATO H, ITO K, LEPOT I. Sensitivity analysis based on high fidelity simulation: application to hypersonic variable-cycle engine intake design[J]. International Journal of Engineering Systems Modeling and Simulation, 2010, 2(1/2):38-45.
- [99] SALTELLI A, TARANTOLA S, CHAN K. Quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output[J]. Technometrics, 1999, 41(1):39-56.
- [100] SOBOL' I M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2001, 55(1/2/3):271-280.
- [101] 徐文丰, 李颖晖, 禹志龙, 等. 结冰飞机的包线保护与控制裕度研究[J]. 控制与决策, 2021, 36(6):1415-1424.
- XU Wenfeng, LI Yinghui, YU Zhilong, et al. Envelope protection and control margin of icing aircraft[J]. Control and Decision, 2021, 36(6):1415-1424. (in Chinese)
- [102] 黄冉冉, 李栋, 刘藤, 等. 冰形表面粗糙度对翼型的失速特性影响分析[J]. 空气动力学学报, 2021, 39(1):59-65.
- HUANG Ranran, LI Dong, LIU Teng, et al. The effect of ice accretion roughness on airfoil stall characteristic[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2021, 39(1):59-65. (in Chinese)
- [103] PAPADAKIS M, ALANSATAN S, WONG S C. Aerodynamic characteristics of a symmetric NACA section with simulated ice shapes[R]. AIAA-2000-0098, 2000.
- [104] DEGENNARO A M, ROWLEY C W, MARTINELLI L. Uncertainty quantification for airfoil icing using polynomial chaos expansions[J]. Journal of Aircraft, 2015, 52(5):1404-1411.
- [105] DEGENNARO A M. Uncertainty quantification for airfoil icing[D]. Princeton, US: Princeton University, 2016.
- [106] TABATABAEI N, RAISEE M, CERVANTES M J. Uncertainty quantification of aerodynamic icing losses in wind turbine with polynomial chaos expansion[J]. Journal of Energy Resources Technology, 2019, 141(5):1-17.
- [107] BOSE N. Icing on a small horizontal-axis wind turbine Part 1: glaze ice profiles[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1992, 45(1):75-85.
- [108] HOCHART C, FORTIN G, PERRON J, et al. Icing simulation of wind turbine blades[J]. AIAA Journal, 2007, 2(3):876-883.
- [109] 王晓东, 于佳鑫, 房代宝, 等. 随机风况下风力机翼型结冰对气动特性的影响研究[J]. 风机技术, 2020, 62(2):59-66.
- WANG Xiaodong, YU Jiaxin, FANG Daibao, et al. Investigations on the influence of icing on aerodynamics of wind turbine airfoil under stochastic wind conditions[J]. Chinese Journal of Turbomachinery, 2020, 62(2):59-66. (in Chinese)

(编辑: 陈越)